

C3 Übung: Potenzfunktionen/Ganzrationale Funktionen

1) Potenzfunktionen sind Funktionen der Form $f(x)=a \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$) mit Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

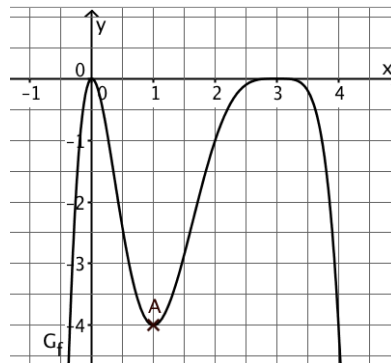
- Skizziere ein Beispiel für einen Graphen mit $a \in \mathbb{R}^+$ und n ungerade.
- Skizziere ein Beispiel für einen Graphen mit $a \in \mathbb{R}^-$ und n gerade.
- Wähle a und n so, dass G_f im ganzen Definitionsbereich fällt.
- Wähle a und n so, dass G_f für $x \in [-\infty; 0]$ steigt und durch den Punkt $(1/-0,5)$ verläuft.

Eine Funktion, deren Funktionsterm aus der Summe von Potenzen derselben Variable mit zugehörigen Koeffizienten bestehen, nennt man ganzrationale Funktion.

2) Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f: x \mapsto 6x^6 - 4x^4$

- Bestimme die Nullstellen von f sowie die Symmetrie des Graphen von f .
- Skizziere G_f .
- Betrachte die Funktion $g: x \mapsto 4x^4 - 6x^6$. Gib mithilfe der Ergebnisse aus a) die Nullstellen von g an.
- „Wenn man zum Funktionsterm f die Zahl 1 addiert, ergibt sich der Term einer neuen Funktion f^* . Die Funktion f^* hat keine Nullstelle“, stellt Thomas fest. Weiterhin behauptet er: „Man muss nur eine genügend große Zahl zu einem Funktionsterm addieren, dann hat dieser neue Funktionsterm keine Nullstelle.“ Ist diese Behauptung für alle ganzrationalen Funktionen richtig? Begründe die Antwort.

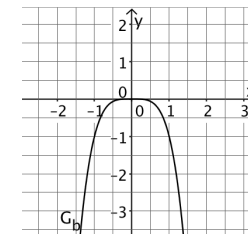
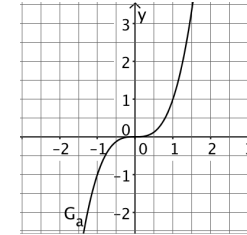
3) Die Funktion zu nebenstehenden Graphen hat den Grad 6. Alle Nullstellen sind ganzzahlig. Bestimme den Funktionsterm.



C3 Lösung



a) „von links unten nach rechts oben“ b) „von links unten nach rechts unten“



c) $a \in \mathbb{R}^-$ und n ungerade

d) G_f steigt zunächst und fällt dann \rightarrow vgl b) $\rightarrow a \in \mathbb{R}^-$ und n gerade

$$\text{da } P(1/-0,5) \in G_f \rightarrow -0,5 = a \cdot 1^n \rightarrow -0,5 = a$$

n ist beliebig, allerdings gerade [mögliche Terme: $f(x) = -0,5x^2$ oder $f(x) = -0,5x^4 \dots$]

2) a,b)

Nullstellen: $6x^6 - 4x^4 = 0$ Trick: Faktorisieren (s. AB A2, BC)

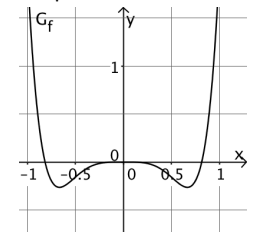
$$x^4(6x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 6x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{3} \rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

[x_1 ist vierfache Nullstelle;

x_2 und x_3 sind einfache Nullstellen]



Symmetrie: $f(-x) = 6(-x)^6 - 4(-x)^4 = 6x^6 - 4x^4 = f(x)$

\rightarrow achsensymmetrisch zur y-Achse

c) $g(x) = -f(x) \rightarrow G_g$ entsteht durch die Spiegelung von G_f an der x-Achse

Bei der Spiegelung an der x-Achse bleibt die Lage der Nullstellen gleich. Nullstellen von g entsprechen den Nullstellen von f .

d) Nein die Behauptung ist falsch.

Betrachte z.B. die Funktion $p(x) = x^3$ mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$

Auch für die Funktion $p^*(x) = x^3 + d$ ($d \in \mathbb{R}$) gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} p^*(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} p^*(x) = \infty$

\rightarrow es findet ein Vorzeichenwechsel statt $\rightarrow p^*$ muss eine Nullstelle besitzen

3) $x_1 = 0$ kein VZW \rightarrow doppelte Nullstelle

$x_2 = 3$ kein VZW \rightarrow vierfache Nullstelle

$$\rightarrow f(x) = a \cdot x^2(x-3)^4$$

Setze Punkt z.B. $A(1/-4)$ ein, um a zu berechnen:

$$-4 = a \cdot 1^2(1-3)^4$$

$$-4 = a \cdot 16$$

$$a = -0,25$$

$$f(x) = -0,25x^2(x-3)^4$$

Kombiniere den Grad der Funktion und den Verlauf an den Schnittpunkten mit x-Achse